Московский государственный университет
имени М В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 512 553+512 56

Сергеев Сергей Николаевич

Идемпотентные аналоги теорем отделимости и образующие идемпотентных полумодулей

01 01 06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Сергеев

Москва — 2008

Работа выполнена на кафедре высшей алгебры Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М В Ломоносова

Научный руководитель	академик РАН, профессор Виктор Павлович Маслов
Официальные оппоненты	доктор физико-математических наук, профессор Игорь Борисович Кожухов
	доктор физико-математических наук, профессор Аскар Аканович Туганбаев
Ведущая организация	Тульский государственный педагогический университет им Л Н Толстого

Защита диссертации состоится 18 апреля 2008 г в 16 ч 40 мин на заседании диссертационного совета Д 501.001 84 в Московском государственном университете имени М В. Ломоносова по адресу· 119991, Российская Федерация, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 14-08

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ имени М В Ломоносова (Главное здание, 14 этаж)

Автореферат разослан 18 марта 2008 г

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 501 001 84 в МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор

А О Иванов

Общая характеристика работы

Актуальность темы

При решении ряда задач в теории оптимизации (проблемы оптимизации на графах, теория оптимального управления, дискретные системы событий, сети Петри), в физике (теория обобщенных решений уравнения Гамильтона-Якоби, низкотемпературная асимптотика в статистической физике), в алгебраической геометрии и в других областях явно или неявно используется линейность по отношению к операции "сложения" $\oplus$, которая является идемпотентной ($a \oplus a = a$) Этот общий принцип, сформулированный академиком В П Масловым[1,2] для ряда задач теории оптимизации и теории нелинейных систем, во многом определяет развитие новой области математики, которая получила название *идемпотентная математика*. Многие интересные результаты, полученные в этой области, содержатся в сборнике статей[3] В практически важных задачах, для решения которых используется идемпотентная математика, роль идемпотентного сложения часто играет операция взятия минимума или максимума двух элементов, а основной алгебраической структурой является некоторое идемпотентное полуполе Например, полуполе $\mathbb{R}_{\max,\times}$, определяемое как множество неотрицательных чисел $\mathbb{R}_+$, снабженное операцией идемпотентного сложения $\oplus = \max$ и обычного умножения $\odot = \times$, или изоморфное ему полуполе $\mathbb{R}_{\max}$, определяемое как множество чисел $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ с операциями $\oplus = \max$ и $\odot = +$

Основные приложения идемпотентной математики связаны с задачами оптимизации Одно из первых таких приложений было описано в работах Б А. Карре[4,5] В этих работах замечено, что метод исключения Гаусса без выбора ведущего элемента можно рассматривать как прототип для оптимизационных алгоритмов на графах и применять для решения систем линейных уравнений над широким классом полуколец. Главный объект в этих работах — это ряд $I \oplus A \oplus A^2 \oplus \ldots$, где A — это некоторая квадратная матрица с элементами из идемпотентного полукольца, являющийся очевидным аналогом операции $(I - A)^{-1}$ и называемый *алгебраическим замыканием* A Эти идеи получили свое дальнейшее развитие в работах Г.Л Литвинова, В П Маслова

[1] V P Maslov *New superposition principle for optimization problems* // Seminaire sur les Equations aux Dérivées Partielles 1985/86, Centre Math de l'Ecole Polytechnique, Palaiseau (1986), exposé 24

[2] В П Маслов *Новый подход к обобщенным решениям нелинейных систем* // ДАН СССР, том 292, №1, стр 37–41, 1987

[3] G L Litvinov and V P Maslov, eds *Idempotent Mathematics and Mathematical Physics* Vol. 377 of Contemporary Mathematics American Mathematical Society, Providence, 2005

[4] B A Carré *An algebra for network routing problems* // J of the Inst of Maths and Applics, vol 7, p. 273–299, 1971

[5] B A Carré *Graphs and Networks* Clarendon Press, Oxford, 1979

и др [6,7], посвященных универсальным алгоритмам линейной алгебры

Другие задачи линейной алгебры над идемпотентными полуполями, в частности, решение систем вида $Ax = b$ и нахождение собственных значений и собственных векторов $Ax = \lambda x$, возникают в связи с составлением расписаний, синхронизацией производства и сетями Петри [8,9,10] Такие приложения возникают и в физике В качестве примера, рассмотрим модель Френкеля-Конторовой В простейшем варианте это одномерная цепочка атомов, находящихся в периодическом потенциале При статическом описании этой модели задача заключается в нахождении основных состояний и значений параметров, которые характеризуют эти состояния Алгоритм для нахождения основных состояний был предложен У Чоу и Р Б Гриффитсом,[11] которые использовали для этого собственные векторы и собственные значения некоторого интегрального оператора над идемпотентным полуполем Метод Чоу и Гриффитса был использован в ряде физических задач [12,13] Близкие по математическому описанию задачи возникают и в математической экономике, а именно, в задачах динамической оптимизации с бесконечным горизонтом, где требуется найти траектории, приносящие максимальный доход [14]

В связи с этими практическими приложениями, возникает интерес к теории идемпотентных полуколец и полуполей, и к теории полумодулей (т е “пространств”) над этими полукольцами Значительная часть этих результатов собрана в монографии Дж. Голана [15] Отметим, что линейная алгебра над идемпотентными полукольцами (и над полукольцами вообще) отличается тем, что в ней есть много способов определить, что такое линейная независимость, ранг и определитель, и в связи с этим возникает много новых нетривиальных задач [16]

Идемпотентный анализ был развит в работах В П Маслова и его сотрудников Основной объект идемпотентного анализа В П Маслова — это полумо-

---

[6] G L Litvinov, V P Maslov, and A Ya Rodionov *Unifying approach to software and hardware design for scientific calculations* // Intern Sophus Lie Centre, Moscow, 1995 *E-print arXiv quant-ph/9904024*

[7] G L Litvinov and E V Maslova. *Universal numerical algorithms and their software implementation* // Programming and Computer Software, vol 26, no 5, p 275–380, 2000 *E-print arXiv math NA/0102144*

[8] R A Cuninghame-Green *Minimax Algebra* Springer, Berlin, 1979

[9] F L Baccelli, G Cohen, G J Olsder, and J P Quadrat *Synchronization and Linearity* Wiley, Chichester, New York, 1992

[10] B Heidergott, G -J Olsder, and J van der Woude *Max-plus at work.* Princeton Univ Press, 2006

[11] W Chou and R B Griffiths *Ground states of one-dimensional systems using effective potentials* // Physical Review B, vol 34, p 6219–6234, 1986

[12] J J Mazo, F Falo and L M Floría *Josephson junction ladders ground state and relaxation phenomena* // Physical Review B, vol 52, p 10433–10440, 1995

[13] C Micheletti, R.B Griffiths, and J M Yeomans *Surface spin-flop and discommensuration transitions in antiferromagnets* Physical Review B, vol 59, p 6239–6249, 1999

[14] В П Маслов и В Н Колокольцов *Идемпотентный анализ и его применение в оптимальном управлении* М Наука, 1994

[15] J Golan *Semirings and their applications* Kluwer, Dordrecht, 2000

[16] A E Guterman *Rank and determinant functions for semirings* // London Mathematical Society Lecture Notes, vol 347, p 1-33, 2007

дуль полунепрерывных функций на некотором топологическом пространстве, принимающих значение в некотором идемпотентном полукольце[17,18,19] В цитированных работах была развита теория идемпотентных мер, интегралов, обобщенных функций и идемпотентно линейных операторов) Эти результаты были использованы для построения обобщенных решений уравнения Беллмана, а также в упоминавшихся выше задачах динамической оптимизации с бесконечным горизонтом В работах Г.Л Литвинова, В П Маслова и Г Б Шпиза[20,21] развит алгебраический подход к идемпотентному анализу Этот подход отличается тем, что в нем основные топологические понятия и результаты моделируются на чисто алгебраическом уровне, с привлечением результатов теории решеток и решеточно упорядоченных групп

Большую роль в развитии идемпотентной математики играет эвристический принцип соответствия,[22] родственный известному принципу соответствия Н Бора у многих интересных конструкций и результатов "традиционной" математики над полями должны быть интересные идемпотентные аналоги В частности, это касается идемпотентного аналога выпуклой геометрии, развитию которого посвящена данная диссертация Один из первых результатов в этом направлении получил К Циммерманн[23] В его работе рассмотрены выпуклые множества в конечномерных полумодулях над $\mathbb{R}_{\max}$ и доказана теорема об отделимости точки от замкнутого идемпотентно выпуклого множества Обобщения этого результата расматриваются в работе С.Н Самборского и Г Б Шпиза[24] (на полумодули функций над идемпотентными полуполями), а также в работах Г Коэна, С. Гобера, Ж -П Квадра и И. Зингера[25] Изучению этого типа выпуклости также посвящена работа М Девелина и Б Штурмфельса[26] В этой работе развивается другой подход к

[17] В П Маслов *Асимптотические методы решения псевдодифференциальных уравнений* М Наука, 1987

[18] V P Maslov and S N Samborskiĭ, eds *Idempotent analysis*, vol 13 of Advances in Soviet Math American Mathematical Society, Providence, 1992

[19] V N Kolokoltsov and V P Maslov *Idempotent analysis and applications* Kluwer Acad Publ, Dordrecht et al, 1997

[20] Г Л Литвинов, В П Маслов и Г Б Шпиз *Линейные функционалы на идемпотентных пространствах алгебраический подход* // Доклады РАН, том 363, №3, стр 298–300, 1998

[21] Г Л Литвинов, В П Маслов и Г Б Шпиз *Тензорные произведения идемпотентных полумодулей Алгебраический подход* // Мат Заметки, том 65, №4, стр 572–585, 1999

[22] G L Litvinov and V P Maslov *Correspondence principle for idempotent calculus and some computer applications* // J Gunawardena (Ed), *Idempotency*, Publications of the I Newton Institute, pages 420–443 Cambridge Univ Press, 1998

[23] K Zimmermann *A general separation theorem in extremal algebras* // Ekonomicko-matematický obzor, vol 13, no 2, 1977, p 179–201

[24] S N Samborskiĭ and G B Shpiz *Convex sets in the semimodule of bounded functions* // V P Maslov and S N Samborskiĭ, eds *Idempotent analysis*, pages 135–137. AMS, Providence, 1992

[25] G Cohen, S Gaubert, J P Quadrat, and I Singer *Max-plus convex sets and functions* // G Litvinov and V Maslov, eds *Idempotent mathematics and mathematical physics*, pages 105–129 AMS, Providence, 2005 *E-print arXiv math FA/0308166*

[26] M Develin and B Sturmfels *Tropical convexity* // Documenta Math, vol 9, 2004, p 1–27 *E-print*

идемпотентной выпуклости, в основе которого лежит разложение свободного полумодуля, элементами которого являются некоторые выпуклые (в обычном смысле) области, то есть клетки Отметим, что важную роль в этих работах играют проекторы на идемпотентные полумодули, имеющие много общего с ортогональными проекциями на выпуклые множества Композиции этих проекторов, исследуемые в данной диссертации и называемые здесь циклическими проекторами на идемпотентные полумодули, также используются для нахождения точки, лежащей в пересечении нескольких полумодулей [27]

Абстрактные версии теорем отделимости, а также результаты, касающиеся соотношений между числами Хелли, Радона и Каратеодори, известны в аксиоматической теории выпуклости [28] В частности, известны теоремы отделимости двух непересекающихся обобщенно выпуклых множеств с помощью двух дополняющих друг друга полупространств [29] Существует также много других обобщений и аналогов теории выпуклости, актуальных в настоящее время в связи с приложениями в математической экономике [30]

Основное затруднение при построении идемпотентного аналога выпуклой геометрии состоит в том, что доказательства многих теорем выпуклой геометрии не переносятся тривиальным образом на исследуемый случай Например, в обычном выпуклом анализе можно легко показать, что два выпуклых множества A и B отделяются друг от друга тогда и только тогда, когда точка 0 отделяется от разности $A - B$, однако в идемпотентной математике нет операции вычитания и идемпотентный аналог разности $A - B$ оказывается слишком “слабым” Похожие трудности возникают и в случае теоремы Минковского о крайних элементах замкнутых выпуклых множеств Преодоление этих трудностей — основной стимул данной работы

Цель работы

Цель работы — исследовать аналог выпуклой геометрии в полумодулях над идемпотентными полуполями, в частности, получить новые аналоги некоторых известных теорем конечномерной выпуклой геометрии

---

arXiv·math MG/0308254

[27] R A Cuninghame-Green and P Butkovič *The equation $A \otimes x = B \otimes y$ over (max,+)* // Theoretical Computer Science, vol 293, 2003, p 3–12

[28] В П Солтан *Введение в аксиоматическую теорию выпуклости* Кишинев, Штиинца, 1984

[29] V Chepoi *Separation of two convex sets in convexity structures* //J of Geometry, vol 50, 1994, p 30-51

[30] A Eberhard, N Hadjisavvas and D T Luc, eds *Generalized convexity, generalized monotonicity and applications.* Vol 77 of Nonconvex Optimization and Its Applications, Springer, 2006

Методы исследования

В работе используются методы линейной алгебры над идемпотентными полукольцами, а также элементы теории решеток и теории неотрицательных матриц и операторов

Научная новизна

Основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем

1 *Получена теорема* отделимости нескольких замкнутых полумодулей и, как следствие этой теоремы, идемпотентный аналог теоремы Хелли,

2 Получена теорема, характеризующая спектр циклических проекторов в терминах некоторого обобщения проективной метрики Гильберта;

3 Получен идемпотентный аналог теоремы Минковского,

4 В связи с клеточным разложением свободного полумодуля, описаны перенормировки операции алгебраического замыкания, определенные для широкого класса квадратных и прямоугольных матриц

Теоретическая и практическая ценность

Диссертация носит теоретический характер Результаты, полученные в ней, могут быть полезны для дальнейшего изучения идемпотентно выпуклой геометрии и теории полумодулей над идемпотентными полукольцами

Апробация результатов

1 Международная конференция "II International Conference on Matrix Methods and Operator Equations" Москва, Институт Вычислительной Математики РАН, 23-27 июля 2007 года

2 Международная конференция "Idempotent and tropical mathematics and problems of mathematical physics" Москва, Независимый Московский Университет, 25-30 августа 2007 года

3. Международная конференция "Геометрия в Астрахани" Астрахань, АГУ, сентябрь 2007 года

4 Семинар "Кольца и модули" Руководители проф А В Михалев, В Н.Латышев, В А Артамонов, Е С Голод, В К Захаров, доц В.Т Марков и А Э.Гутерман. Москва, МГУ им М В Ломоносова, октябрь 2007 года

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в пяти работах автора Список работ приведен в конце автореферата [1-5]

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения и трех глав. Текст диссертации изложен на 71 странице Список литературы включает 85 наименований

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении изложена краткая история исследуемого вопроса, показана актуальность темы и сформулированы основные результаты диссертации

Первая глава

В первой главе получены основные результаты по теоремам отделимости и циклическим проекторам в идемпотентных полумодулях, полученные в статье [3] Напомним некоторые факты, касающиеся роли отношения порядка в идемпотентных полуполях и полумодулях, а также об идемпотентном аналоге выпуклости.

Рассматривается полумодуль $\mathcal{V}$ над полуполем $\mathcal{K}$ с идемпотентным сложением $\oplus$ Нуль полуполя и нуль полумодуля обозначаются $\mathbf{0}$, единица полуполя обозначается $\mathbf{1}$ Сложение $\oplus$ задает порядок $\leq$ в полукольце $\mathcal{K}$ по правилу $\lambda \oplus \mu = \mu \Leftrightarrow \lambda \leq \mu$ для $\lambda, \mu \in \mathcal{K}$, причем $\lambda \oplus \mu = \sup(\lambda, \mu)$ (по отношению $\leq$) Идемпотентная сумма элементов произвольного множества определяется как точная верхняя грань этого множества, если таковая существует Отношение порядка с аналогичными свойствами определяется и в полумодуле, его мы также обозначаем $\leq$ Так как любой элемент полуполя или полумодуля неотрицателен по этому отношению, то подполумодули $\mathcal{V}$ можно рассматривать как аналоги выпуклых конусов неотрицательного ортанта Эта точка зрения согласована со следующим идемпотентным аналогом выпуклости. Дадим следующее хорошо известное определение

Определение 1 Множество $C \subseteq \mathcal{V}$ называется *идемпотентно выпуклым*, если $\lambda x \oplus \mu y \in C$ для любых $x, y \in C$ и таких $\lambda, \mu \in \mathcal{K}$, что $\lambda \oplus \mu = \mathbf{1}$

Полукольцо или полумодуль называются *b-полными*, если они замкнуты относительно взятия сумм (т е точных верхних граней) любых подмножеств, ограниченных сверху, и если умножение дистрибутивно относительно любых таких сумм Если можно брать точные верхние грани $\oplus$ ограниченных сверху множеств, то можно брать и точные нижние грани $\wedge$ множеств, ограниченных снизу Следовательно, в b-полном полукольце или полумодуле можно брать точные нижние грани любых подмножеств, так как все подмножества ограничены снизу нулем $\mathbf{0}$

Далее мы будем считать, что полукольцо $\mathcal{K}$ и полумодуль $\mathcal{V}$ над $\mathcal{K}$ удовлетворяют следующим условиям

$(A0)$. полукольцо $\mathcal{K}$ является b-полным идемпотентным полуполем, а полумодуль $\mathcal{V}$ является b-полным полумодулем над $\mathcal{K}$,

$(A1)$ для любых элементов x и $y \neq \mathbf{0}$ из $\mathcal{V}$, множество $\{\lambda \in \mathcal{K} \mid \lambda y \leq x\}$ ограничено сверху

Эти предположения справедливы для многих полумодулей, рассматривающихся в идемпотентном анализе Например, для полумодулей $LSC(X)$ полунепрерывных снизу функций на топологическом пространстве X, принимающих значение в некотором b-полном полуполе ($\mathbb{R}_{\max,\times}$)

Из предположений $(A0, A1)$ вытекает, что операция

$$x/y = \max\{\lambda \in \mathcal{K} \mid \lambda y \leq x\}.$$

определена для всех x и всех $y \neq \mathbf{0}$ из $\mathcal{V}$.

Следующее определение хорошо известно

Определение 2 *Назовем подполумодуль V полумодуля $\mathcal{V}$* b-(под)полумодулем, *если V замкнут относительно взятия сумм любых своих подмножеств, ограниченных сверху в $\mathcal{V}$*

Пусть V — это b-подполумодуль полумодуля $\mathcal{V}$ Рассмотрим оператор P_V, определенный по известной формуле

$$P_V(x) = \max\{u \in V \mid u \leq x\},$$

для любого элемента $x \in \mathcal{V}$. Мы пишем "max", подчеркивая, что точная верхняя грань множества в фигурных скобках принадлежит этому множеству. Оператор P_V является *проектором* на подполумодуль V, так как $P_V(x) \in V$ для любого $x \in \mathcal{V}$ и $P_V(v) \in V$ для любого $v \in V$

Роль полупространства играет следующий известный объект

Определение 3 *Множество H, определенное с помощью*

$$H = \{x \mid u/x \geq v/x\} \cup \{\mathbf{0}\}$$

где $u, v \in \mathbb{R}^n_{\max,\times}$, $u \leq v$, называется (идемпотентным) полупространством.

Если $\mathcal{V} = \mathcal{K}^n$ и все координаты u и v ненулевые, то

$$H = \{x \mid \bigoplus_{\{1,\ ,n\}} x_i u_i^{-1} \leq \bigoplus_{\{1,\ ,n\}} x_i v_i^{-1}\},$$

то есть H — это аналог замкнутого однородного полупространства

Следующий результат близок к известной теореме отделимости точки от полумодуля [31] Его также можно рассматривать как следствие теоремы о представлении идемпотентно линейных функционалов.[32]

Предложение 1 *Пусть $V \subseteq \mathcal{V}$ — это b-полумодуль и пусть $u \notin V$ Тогда полупространство*

$$H = \{x \mid P_V(u)/x \geq u/x\} \cup \{\mathbf{0}\}$$

содержит V и не содержит u.

Если $V_1, \ldots, V_k$ — это b-полумодули, то можно определить *циклический проектор* $P_k \cdots P_1$, где через P_i обозначен проектор на полумодуль V_i

Определяемое ниже понятие архимедовости является упрощенной версией того, что используется в идемпотентном функциональном анализе[33]

Определение 4 Вектор $x \in \mathcal{V}$ назовем *архимедовым*, если $x/y > \mathbf{0}$ для всех $y \in \mathcal{V}$ Подполумодуль $V \subseteq \mathcal{V}$ назовем *архимедовым*, если он содержит хотя бы один архимедов вектор Полупространство будет называться *архимедовым*, если оба определяющих вектора архимедовы

Заметим, что в полумодулях $\mathcal{K}^n$, где $\mathcal{K}$ — это идемпотентное b-полное полуполе, архимедовы векторы — это в точности те векторы, все координаты которых положительны. Другой пример полумодуля, имеющего архимедовы векторы — это полумодуль полунепрерывных функций на некотором компакте Если полумодуль $\mathcal{V}$ удовлетворяет $(A0, A1)$ и имеет архимедовы векторы, то справедлива следующая теорема, полученная автором·

Теорема 1 *Пусть у оператора $P_k \cdots P_1$ есть архимедов собственный вектор y с ненулевым собственным значением λ Следующие условия эквивалентны*

1. *существует такой архимедов вектор x, что $P_k \cdots P_1 x \leq \mu x$ для некоторого $\mu < 1$.*
2. *для любого $i = 1, \ldots, k$ существуют такие архимедовы полупространства H_i, что $V_i \subseteq H_i$ и $\cap_i H_i = \{\mathbf{0}\}$,*
3. *$\cap_i V_i = \{\mathbf{0}\}$,*

[31] G. Cohen, S Gaubert, and J P Quadrat *Duality and separation theorems in idempotent semimodules* // Linear Algebra Appl , vol 379, 2004, p 395–422 *E-print arXiv:math FA/0212294*

[32] Г.Л Литвинов, В П Маслов и Г Б Шпиз *Идемпотентный функциональный анализ Алгебраический подход* // Матем. Заметки, том 69, №5, 2001, стр 758–797 *E-print (English) arXiv:math FA/0009128*

[33] Г Б. Шпиз *Теорема о существовании собственных векторов в идемпотентном анализе* // Матем Заметки, том 82, №3, 2007, стр 459 – 468

4 $\lambda < 1$

В общем случае удается также получить следующий результат, касающийся спектра циклических проекторов

Определение 5 Пусть $V_1, \ldots, V_k$ — это b-подполумодули $\mathcal{V}$ Величину

$$d_{\mathrm{H}}(V_1, \ldots, V_k) = \sup_{x^1 \in V_1, \ldots, x^k \in V_k} (x^1/x^2) \odot (x^2/x^3) \odot \cdots \odot (x^k/x^1)$$

назовем *гильбертовым значением полумодулей* $V_1, \ldots, V_k$

Теорема 2 *Пусть $V_1, \ldots, V_k$ — это b-подполумодули, и у оператора $P_k \cdots P_1$ есть архимедов собственный вектор y с ненулевым собственным значением λ. Тогда это собственное значение совпадает с гильбертовым значением полумодулей $V_1, \ldots, V_k$, причем на векторах $\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^k$, где $\bar{x}^i = P_i \cdots P_1 y$, достигается максимум в определении гильбертова значения*

Рассмотрим теперь случай $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n_{\max,\times}$. В $\mathbb{R}^n_{\max,\times}$ естественно рассматривать полумодули, замкнутые в евклидовой топологии. Можно показать, что такие полумодули являются b-полумодулями и что проектор на такой полумодуль непрерывен (в обычном смысле) Как и в общем случае, проектор является также однородным и изотонным оператором Если F — оператор, обладающий такими свойствами, то у него есть собственные значения, их конечное число, и спектральный радиус равен

$$\rho(F) = \max\{\lambda \in \mathbb{R}_+ \mid \exists x \in (\mathbb{R}^n_+) \setminus 0,\ Fx = \lambda x\} .$$

Справедливо также следующее нелинейное обобщение формулы Коллатца-Виландта для спектрального радиуса неотрицательной матрицы [34]

Предложение 2 *Пусть $F \colon \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^n_+$ — это изотонный, однородный и непрерывный оператор Тогда*

$$\rho(F) = \inf_{x \in (\mathbb{R}_+ \setminus \{0\})^n} \max_{1 \le i \le n} [F(x)]_i x_i^{-1}$$

Применимость этих результатов к циклическим проекторам позволяет усилить результаты для общего случая Сформулируем общую теорему отделимости для подполумодулей в $\mathbb{R}^n_{\max,\times}$

Теорема 3 *Пусть $V_1, \ldots, V_k$ — это замкнутые архимедовы полумодули в $\mathbb{R}^n_{\max,\times}$. Следующие утверждения эквивалентны:*

[34] R D Nussbaum *Convexity and log convexity for the spectral radius* // Linear Algebra Appl , vol. 73, 1986, p 59–122

1 *существуют положительный вектор x и число $\lambda < 1$, такие, что $P_k \cdots P_1 x \leq \lambda x$,*

2. *существуют архимедовы полупространства H_i, содержащие V_i и такие, что $\cap_{i=1}^k H_i = \{\mathbf{0}\}$,*

3 $\cap_{i=1}^k V_i = \{\mathbf{0}\}$,

4. $\rho(P_k \cdot\ \cdot P_1) < 1$

Условия 2 и 3 эквивалентны и в том случае, когда архимедовость $V_1, \quad , V_k$ не предполагается

Эквивалентность условий 2 и 3. в этой теореме — это утверждение об отделимости нескольких полумодулей Далее, в случае $\mathbb{R}^n_{\max,\times}$ удается полностью охарактеризовать собственные значения циклических проекторов Введем обозначение

$$V^M = \{x \in V \mid \mathrm{supp}(x) \subset M\},$$

где M — произвольное подмножество $\{1, \quad , n\}$

Теорема 4 *Пусть $V_1, \quad , V_k$ — это замкнутые полумодули в $\mathbb{R}^n_{\max,\times}$ Тогда гильбертово значение $V_1, \quad , V_k$ — это спектральный радиус $P_k \quad \cdot P_1$ Спектр $P_k \quad P_1$ — это множество гильбертовых значений $d_{\mathrm{H}}(V_1^M, \cdot \quad , V_k^M)$, где M пробегает все подмножества $\{1, \quad , n\}$*

Еще одним следствием теоремы об отделимости нескольких полумодулей является идемпотентный аналог теоремы Хелли.

Теорема 5 (Теорема Хелли) *Пусть C_i, $i = 1, \quad , m$ — это совокупность $m \geq n+1$ идемпотентно выпуклых множеств в $\mathbb{R}^n_{\max,\times}$ Если любые $n+1$ из них пересекаются, то и вся совокупность в целом имеет непустое пересечение*

Вторая глава

Во второй главе изложены результаты, касающиеся образующих и крайних точек подполумодулей $\mathbb{R}^n_{\max,\times}$, полученные автором в статье [4].

Будем говорить, что идемпотентный полумодуль V *порождается* множеством S, если V является множеством конечных линейных (в смысле операций $\oplus$ и $\odot$) комбинаций элементов из S Следующее определение также хорошо известно

Определение 6 Элемент x идемпотентного полумодуля V называется *крайним*, если из $x = u \oplus v$ следует, что $x = u$ или $x = v$.

Следующее определение дано автором диссертации

Определение 7 *Рассмотрим отношение предпорядка*

$$y \leq_j x \Leftrightarrow x_j \neq 0,\ y_j \neq 0,\ y/y_j \leq x/x_j$$

Элемент множества $S \subseteq \mathbb{R}^n_{\max,\times}$ *назовем* j-минимальным, *если он минимален по отношению* $\leq_j$.

Следующие предложения, полученные автором, раскрывают роль отношения $\leq_j$ и его связь с крайними элементами идемпотентных полумодулей

Теорема 6 *Следующие утверждения эквивалентны*

(1) элемент y *является линейной комбинацией элементов* $x^1, \ldots, x^m \in \mathbb{R}^n_{\max,\times}$,

(2) для любого номера $j \in \{1, \ldots, n\}$, *такого, что* $y_j \neq 0$, *найдется вектор* x^l *такой, что* $x^l \leq_j y$

Теорема 7 *Пусть идемпотентный полумодуль* V *порожден множеством* $S \subseteq \mathbb{R}^n_{\max,\times}$. *Следующие утверждения эквивалентны*

(1) x *— это крайний элемент* V;

(2) x *является* j*-минимальным элементом* S *для некоторого индекса* $j \in \{1, \ldots, n\}$,

Таким образом, крайние элементы полумодуля V — это j-минимальные элементы множества его образующих Задача на нахождение частичных максимумов (или минимумов) в n-мерном действительном пространстве была исследована Ф Препаратой и др [35] Из этих результатов вытекает следующее.

Теорема 8 *Если полумодуль* $V \subseteq \mathbb{R}^n_{\max,\times}$ *порожден* k *элементами, то вычислительная сложность задачи о нахождении крайних элементов* V *не превосходит* $O(k \log_2 k)$ *при* $n = 3$ *и* $O(k(\log_2 k)^{(n-3)})$ *при* $n \geq 3$.

Используя теорему 7, можно вывести следующий аналог теоремы Минковского.

Теорема 9 *Если полумодуль* V *замкнут, то он порождается своими крайними элементами.*

[35]Ф Препарата и М Шеймос *Вычислительная геометрия Введение* М Мир, 1989

Множество крайних элементов замкнутого полумодуля, вообще говоря, не замкнуто Однако справедлив следующий результат

Предложение 3 *Если множество $S \subset \mathbb{R}^n_{\max,\times}$ компактно и $0 \notin S$, то полумодуль V, порожденный множеством S, замкнут*

Отметим, что с помощью теоремы 7 можно получить также следующее предложение, следствием которого является известная теорема о единственности базиса конечнопорожденного полумодуля

Предложение 4 *Пусть S — это множество нормированных образующих полумодуля V в $\mathbb{R}^n_+$ и пусть E — это множество нормированных крайних элементов V. Тогда*

1 *$E \subseteq S$.*

2. *Пусть $F = S \backslash E$ Тогда для любого $u \in F$ множество $S \backslash \{u\}$ порождает K.*

Третья глава

В третьей главе изложены результаты по клеточному разложению и перенормировкам операции замыкания, полученные автором в статьях [1,2,5]

Строение полумодулей, порожденных двумя векторами, описывается следующей теоремой, полученной автором в статье [1]

Теорема 10 *Пусть $y, z \in \mathbb{R}^n_{\max,\times}$ и $\mathrm{supp}(y) \cup \mathrm{supp}(z) = \{1, \ldots, n\}$ Обозначим через σ такую перестановку $\{1, \ldots, n\}$, что*

$$y_{\sigma(1)}(z_{\sigma(1)})^{-1} \leq y_{\sigma(2)}(z_{\sigma(2)})^{-1} \leq \ldots \leq y_{\sigma(n)}(z_{\sigma(n)})^{-1}.$$

Тогда

$$\mathrm{span}(y, z) = \bigcup_{i=1}^{n-1} \mathrm{span}(v^i, v^{i+1}),$$

где $v^i = z_{\sigma(i)} y \oplus y_{\sigma(i)} z$, причем для любого $i = 1, \ldots, n-1$ полумодуль $\mathrm{span}(v^i, v^{i+1})$ — это выпуклый (в обычном смысле) конус, линейная размерность которого не превосходит 2

Таким образом, полумодуль с двумя образующими в $\mathbb{R}^n_{\max,\times}$ в общем случае имеет $n-1$ выпуклых “звеньев” Это частный случай клеточного разложения

Следующая теорема является одним из ключевых алгебраических результатов третьей главы, полученных автором в статьях [2,5]

Теорема 11 *Пусть A и B — это две квадратные матрицы, такие, что $\lambda(A) \leq 1$ и $\lambda(B) \leq 1$ Тогда $A^* = B^*$ в том и только в том случае, когда $span(A^*) = span(B^*)$, совпадают*

Через span здесь обозначен полумодуль, порожденный столбцами соответствующей матрицы Квадратная матрица A называется *определенной*, если $\lambda(A) = 1$ и если все ее диагональные элементы равны 1 Если A — это определенная матрица, то $\operatorname{eig}(A) = \operatorname{span}(A^*)$

Следствие 1 *Пусть A и B — определенные матрицы Тогда $A^* = B^*$ в том и только в том случае, когда $eig(A) = eig(B)$*

Можно проверить, что собственные полумодули определенных матриц в $\mathbb{R}^n_{\max,\times}$ являются в то же время и выпуклыми конусами в $\mathbb{R}^n_+$. Оказывается, имеет место следующий результат

Предложение 5 *Линейная размерность собственного полумодуля определенной матрицы (как выпуклого конуса) равна мощности минимального набора идемпотентных образующих этого полумодуля*

Введем ряд понятий, связанных с клеточным разложением Пусть A — это матрица размера $n \times m$ над $\mathbb{R}_{\max,\times}$ и пусть y — это вектор с n компонентами Обозначим совокупность множеств $S = \{S_j \cdot j \in \operatorname{supp}(y)\}$, где $S_j = \{i \; y \geq_j A_i\}$, через $\operatorname{type}(y \mid A)$ и назовем ее *комбинаторным типом* точки y относительно A Можно определить комбинаторные типы и более общо, как произвольные совокупности не более чем n возможно пустых подмножеств $\{1, \quad , m\}$ Обозначим множество тех индексов i, чьи S_i присутствуют в типе, через $\operatorname{supp}(S)$ Если $S = \operatorname{type}(y \mid A)$ для некоторого y, то $\operatorname{supp}(S) = \operatorname{supp}(y)$ Типы частично упорядочены по следующему правилу: $S \subseteq S'$, если $\operatorname{supp}(S') \subseteq \operatorname{supp}(S)$ и $S_i \subseteq S'_i$ для всех $i \in \operatorname{supp}(S)$ Множество

$$X^S = \{z \cdot S \subseteq \operatorname{type}(z \mid A)\}$$

будем называть *клеткой*, соответствующей типу S. Если $A_{ik} \neq 0$ для всех $i \in S_k$, то тип S называется *допустимым* и мы можем ввести матрицу A^S по правилу

$$A^S_i = \begin{cases} \bigoplus_{k \in S_i} A_k / A_{ik}, & \text{если } i \in \operatorname{supp}(S) \text{ и } S_i \neq \emptyset, \\ e_i, & \text{если } i \in \operatorname{supp}(S) \text{ и } S_i = \emptyset, \\ \mathbf{0}, & \text{если } i \notin \operatorname{supp}(S) \end{cases}$$

Справедливо следующее предложение, с помощью которого клетка представляется как собственный полумодуль матрицы A^S, см [5]

Предложение 6 *Если клетка X^S непуста, то $X^S = eig(A^S)$*

Отметим, что из этого предложения также можно вывести теорему 10 Используя следствие 1, сразу получаем следующий результат

Теорема 12 *Пусть S и T — это допустимые типы, такие, что их непустые клетки X^S и X^T совпадают между собой Тогда $(A^S)^* = (A^T)^*$.*

Эта теорема позволяет определить *клеточное замыкание* матрицы A как $(A^S)^*$ Эта операция корректно определена для любой клетки, будучи независимой от того типа, который определяет клетку

Рассмотрим теперь случай, когда A — это квадратная матрица размера $n \times n$, у которой есть перестановка σ с ненулевым весом $\bigodot_{i=1}^{n} A_{i\sigma(i)}$ Перестановка с максимальным весом называется *максимальной* Определим D^σ как матрицу, такую, что $D^\sigma_{ij} = A_{ij}$, если $j = \sigma(i)$ и $D_{ij} = 0$ для остальных элементов Если перестановка σ максимальна, то матрица $A(D^\sigma)^{-1}$ является определенной и называется *определенной формой* A Различные максимальные перестановки приводят к различным определенным формам, однако можно показать, что их собственные пространства совпадают, и это приводит к следующему результату [2,5]

Теорема 13 *Замыкания всех определенных форм любой квадратной матрицы совпадают*

Таким образом, для любой квадратной матрицы A, имеющей ненулевые перестановки, можно определить ее *определенное замыкание* как $(A(D^\sigma)^{-1})^*$, где σ — это любая максимальная перестановка Определенное замыкание является частным случаем клеточного, поскольку $\operatorname{eig}(A(D^\sigma)^{-1})$ совпадает с клеткой X^S, соответствующей типу $S = (\{\sigma(1)\}, \ldots, \{\sigma(n)\})$ где σ — это любая максимальная перестановка

В заключение автор выражает глубокую благодарность основателю научного направления, в рамках которого выполнена данная работа, своему научному руководителю академику РАН В П Маслову за постановку задачи и постоянное внимание к этой работе, а также профессорам и преподавателям кафедры Высшей Алгебры Механико-математического факультета МГУ за благожелательное отношение к этой работе и ценные обсуждения полученных в ней результатов

Работы автора по теме диссертации

1 С Н Сергеев *Алгоритмическая сложность одной задачи идемпотентно выпуклой геометрии* // Мат Заметки, том 74, №6, 2003, стр 896–901

2 С Н Сергеев *Идемпотентные замыкания определенных матриц* // Доклады РАН, том 408, №4, 2006, стр 453–454

3 С.Н Сергеев и С Гобер *Циклические проекторы и теоремы отделимости в идемпотентных полумодулях* // Фундаментальная и прикладная математика, том 13, вып 4, 2007, стр 31-52

В этой статье С Н Сергееву полностью принадлежат формулировки и доказательства теоремы 11 (об отделимости нескольких полумодулей в общем случае), теоремы 23 (идемпотентный аналог теоремы Хелли) и теоремы 25 (характеристика спектра циклических проекторов) Остальные результаты статьи, включая теоремы 18, 20 и 22 (об отделимости в конечномерном случае), являются плодом совместной работы С Н Сергеева и С Гобе́ра (Dr Stéphane Gaubert, Directeur de recherche, INRIA), и эти результаты не могут быть разделены

4. S Sergeev, P Butkovič, H Schneider. *Generators, extremals and bases of max cones* // Linear Algebra Appl , vol 421, 2007, p 394 – 406

Формулировка теоремы 16 и ее первоначальное (не содержащееся в статье) доказательство, а также формулировка и доказательство теоремы 18, предложения 31 и алгоритма 32 принадлежат П. Буткóвичу (Dr Peter Butkovic, Senior lecturer and reader, University of Birmingham) и Г Шна́йдеру (Dr. Hans Schneider, J.J Sylvester Professor Emeritus, University of Wisconsin, Madison), а формулировки и доказательства других результатов статьи, включая предложение 11, теорему 14 (о том, что крайние элементы — это минимумы), предложение 24 (тропическая теорема Минковского), предложение 25, а также оценку вычислительной сложности задачи о нахождении крайних элементов (в конце статьи), принадлежат С Н Сергееву

5 S Sergeev. *Max-plus definite matrix closures and their eigenspaces* // Linear Algebra Appl , vol 421, 2007, p 182 – 201

Издательство ЦПИ при механико-математическом факультете
МГУ им М В Ломоносова

Подписано в печать 14.03 08
Формат 60×90 1/16 Усл печ л 1,25
Тираж 100 экз Заказ 12

Отпечатано с оригинал-макета на типографском оборудовании
механико-математического факультета