ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА»

На правах рукописи

Черных Георгий Сергеевич

Операции и умножения, связанные с SU- и c_1-сферическими бордизмами

1.1.3 — Геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Москва — 2023

Работа выполнена на кафедре высшей геометрии и топологии механико-математического факультета ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова».

Научный руководитель: **Панов Тарас Евгеньевич,**
доктор физико-математических наук,
доцент, Московский государственный
университет имени М. В. Ломоносова, Механико-математический факультет, кафедра высшей
геометрии и топологии, профессор

Официальные оппоненты: **Веснин Андрей Юрьевич,**
член-корреспондент РАН,
Институт математики имени
С. Л. Соболева Сибирского отделения
Российской академии наук, лаборатория
динамических систем, главный научный
сотрудник

Панин Иван Александрович,
член-корреспондент РАН,
Санкт-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Российской академии наук, лаборатория
алгебры и теории чисел, главный научный
сотрудник

Попеленский Фёдор Юрьевич,
кандидат физико-математических наук, доцент,
Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова, Механико-математический
факультет, кафедра дифференциальной
геометрии и приложений, доцент

Защита диссертации состоится 22 декабря 2023 года в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета МГУ.011.4 «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова» по адресу: РФ, 119234, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ имени М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, аудитория 14-08.

E-mail: manuilov@mech.math.msu.su

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова по адресу: Москва, Ломоносовский проспект, д. 27 и на сайте ИАС «ИСТИНА»: `https : //https : //dissovet.msu.ru/dissertation/011.4/2673`

Автореферат разослан 10 октября 2023 года.

Ученый секретарь диссертационного совета
МГУ.011.4,
доктор физико-математических наук **Мануйлов Владимир Маркович**

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования и степень её разработанности

В диссертации рассматривается важный классический раздел алгебраической топологии — теория комплексных и SU- бордизмов, а также изучается промежуточная теория — c_1-сферических бордизмов W. В диссертации решена задача классификации всех SU-линейных операций в комплексных кобордизмах в терминах хорошо известных геометрических операций ∂_i, приведены вычисления спектральной последовательности Адамса–Новикова[1] для спектра SU-бордизмов, позволяющие доказать результаты о группах коэффициентов Ω_n^{SU}, решена задача обобщения результатов В. М. Бухштабера[2]. о формальной группе F_W в c_1-сферических бордизмов на случай произвольных SU-билинейных умножений на W, и кроме того, доказана точность по Ландвеберу формальной группы F_W.

Актуальность изучения промежуточной теории W заключается в том, что эта теория возникает при попытке вычисления классического кольца SU-бордизмов Ω^{SU}. Однако в отличие от теории SU-бордизмов, на теории c_1-сферических бордизмов нет естественного умножения. Несмотря на это на W можно разными способами определить мультипликативную структуру, что приводит к задаче описания таких умножений и их колец коэффициентов. С другой стороны, в отличие от теории SU-бордизмов теория W является комплексно ориентируемой, что мотивирует изучение соответствующих комплексных ориентаций и формальных групп. Наконец, теория W выделяется в теории комплексных бордизмов как прямое слагаемое с помощью SU-линейных проекторов (также с помощью них обычно определяется и умножение на W). Однако таких проекторов много, среди них нет какого-то выделенного, и поэтому возникает задача описания таких SU-линейных проекторов, и вообще SU-линейных операций в комплексных кобордизмах.

Комплексные бордизмы, или *U-бордизмы*, — это теория бордизмов стабильно комплексных многообразий. Геометрически, стабильно комплексная структура (U-структура) на многообразии M представляет из себя комплексную структуру на стабильном касательном расслоении, т. е. редукцию структурной группы стабильного касательного расслоения к группе $U(N)$. Гомотопически, стабильно комплексная структура задаётся гомотопическим классом поднятия отображения $M \to BO(2N)$, классифицирующего стабильное касательное расслоение, до отображения $M \to BU(N)$. Классы бордизма стабильно комплексных многообразий образуют градуированное кольцо по отношению к операциям дизъюнктного объединения и прямого произведения, называемое *кольцом комплексных бордизмов* и обозначаемое через MU_*. Это кольцо коэффициентов *теории комплексных бордизмов*, обобщённой теории (ко)гомологий, определяемой *спектром Тома* $MU = \{MU(n)\}$, где $MU(n)$ — пространство Тома универсального $U(n)$-расслоения $EU(n) \to BU(n)$. Для CW-пары (X, A) её группы бордизмов и кобордизмов определяются как

$$\begin{aligned} MU_n(X,A) &= \lim_{k\to\infty} \pi_{2k+n}\big((X/A)\wedge MU(k)\big),\\ MU^n(X,A) &= \lim_{k\to\infty} \big[\Sigma^{2k-n}(X/A), MU(k)\big] \quad \text{для конечной CW-пары } (X,A). \end{aligned}$$

В частности, $\Omega_*^U = \pi_*(MU) = MU_*(pt) = \lim_{k\to\infty}\pi_{2k+*}\big(MU(k)\big)$. Мы также имеем $\Omega_U^* = MU^*(pt) = \Omega_{-*}^U$ — *кольцо комплексных кобордизмов*, градуированное неположительно.

SU-бордизмы — это теория бордизмов гладких многообразий со специальной унитарной структурой в стабильном касательном расслоении. Геометрически, SU-структура на многообразии M определяется редукцией структурной группы стабильного касательного расслоения на M к группе $SU(N)$. Гомотопически, SU-структура — это гомотопический класс поднятия отображения $M \to BO(2N)$, классифицирующего стабильное касательное расслоение, до отображения $M \to BSU(N)$. Многообразие M допускает SU-структуру тогда и только тогда, когда оно допускает стабильно комплексную структуру с $c_1(\mathcal{T}M) = 0$. *Кольцо SU-бордизмов* $\Omega_*^{SU} = \pi_*(MSU)$ является кольцом коэффициентов *теории SU-бордизмов*, определяемой спектром Тома $MSU = \{MSU(n)\}$.

[1]Новиков С. П. *Методы алгебраической топологии с точки зрения теории кобордизмов.* Изв. АН СССР. Сер. матем., 31:4 (1967), 855–951.

[2]Бухштабер В. М. *Проекторы в унитарных кобордизмах, связанные с SU-теорией*

История вопроса

Теория бордизмов и кобордизмов находилась в состоянии бурного роста и развития в начале 1960-х годов. Большинство ведущих топологов того времени внесли свой вклад в эту область. Идея бордизма была впервые сформулирована в явном виде Понтрягиным[3], который связал теорию оснащенных многообразий с изучением стабильных гомотопических групп сфер, используя понятие трансверсальности. В ранних работах, как например у Рохлина[4], теория бордизмов называлась «внутренними гомологиями», имея в виду идею гомологических циклов, восходящую к Пуанкаре. Первая изученная теория бордизмов — неориентированные бордизмы — стала предметом фундаментальной работы Тома[5], который полностью вычислил кольцо неориентированных бордизмов $\varOmega^O$. Описание кольца ориентированных бордизмов $\varOmega^{SO}$ было закончено к концу 1950-х годов работами Новикова [6][7] (мультипликативная структура по модулю кручения) и Уолла[8] (произведения элементов конечного порядка); важные более ранние результаты были получены Томом [5] (описание кольца $\varOmega^{SO}\otimes\mathbb{Q}$), Авербухом[9] (отсутствие нечётного кручения), Милнором[10] (аддитивная структура по модулю кручения), а также Рохлиным[4].

Кульминацией в развитии этой теории стало вычисление кольца комплексных (унитарных) бордизмов $\varOmega^U$, выполненное в работах Милнора[10] и Новикова[6][7]. Было показано, что кольцо $\varOmega^U$ изоморфно градуированному кольцу многочленов $\mathbb{Z}[a_i\colon i\geqslant 1]$ от бесконечного числа переменных, с одной образующей в каждой четной размерности, $\deg a_i = 2i$. Этот результат нашел многочисленные приложения в алгебраической топологии и смежных разделах науки. В работе 1967 года С. П. Новиков[11] ввёл спектральную последовательность, которая стала известна как спектральная последовательность Адамса–Новикова, и привнёс в теорию кобордизмов методы теории формальных групп, получившие дальнейшее развитие и популяризацию в работах топологов его школы, а также Д. Квиллена и многих других. Связь комплексных кобордизмов и формальных групп занимает центральное место во многих современных разделах стабильной теории гомотопий, например, в хроматической теории (см., например, [12]), восходящей к работам Дж. Моравы, Д. Равенела, М. Хопкинса и многих других и получившей бурное развитие в последнее время. В разделе 1.2 диссертации приводятся основные определения теории комплексных (унитарных) бордизмов, так как в дальнейшем она используется для описания структуры кольца SU-бордизмов.

Изучение SU-бордизмов в 1960-х годах обозначило границы применимости методов алгебраической топологии. Кольцо коэффициентов $\varOmega^{SU}$ считается известным. Оно не является кольцом многочленов, хотя и становится таковым при обращении двойки. Наибольший вклад здесь внесли Новиков[7] (описание кольца $\varOmega^{SU}\otimes\mathbb{Z}[\frac12]$), Коннер и Флойд[13] (произведения элементов конечного порядка), Уолл[14] и Стонг[15] (мультипликативная структура кольца $\varOmega^{SU}/\mathrm{Tors}$). Тем не менее, как было замечено Стонгом[15](с. 247), «исчерпывающее описание мультипликативной структуры кольца $\varOmega^{SU}/\mathrm{Tors}$ чрезвычайно сложно». Наилучшее из имеющихся на данный момент описание кольца $\varOmega^{SU}/\mathrm{Tors}$ заключается в весьма нетривиальном вложении его как подкольца в кольцо многочленов $\varOmega^W$, являющееся в свою очередь кольцом коэффициентов теории Коннера–Флойда c_1-сферических многообразий (см. детали в разделе 4.5 диссертации).

[3] Понтрягин Л. С. *Гладкие многообразия и их применения в теории гомотопий.* Тр. МИАН СССР, 45 (1955), 3–139.

[4] Рохлин В. А. *Теория внутренних гомологий.* УМН, 14:4(88) (1959), 3–20.

[5] Thom, René. *Quelques propriétés globales des variétés différentiables.* Comment. Math. Helv. 28 (1954), 17–86. [Русский перевод: сб. «Расслоенные пространства и их приложения», ИЛ, Москва, 1958, стр. 293–351.]

[6] Новиков С. П. *О некоторых задачах топологии многообразий, связанных с теорией пространств Тома.* ДАН СССР, 132:5 (1960), 1031–1034.

[7] Новиков С. П. *Гомотопические свойства комплексов Тома.* Матем. сб., 57(99):4 (1962), 407–442.

[8] Wall, C. T. C. *Determination of the cobordism ring.* Ann. of Math. (2) **72** (1960), 292–311.

[9] Авербух Б. Г. *Алгебраическое строение групп внутренних гомологии.* ДАН СССР, 125 (1959), 11–14.

[10] Milnor, John. *On the cobordism ring* Ω^* *and a complex analogue. I.* Amer. J. Math. 82 (1960), 505–521.

[11] Новиков С. П. *Методы алгебраической топологии с точки зрения теории кобордизмов.* Изв. АН СССР. Сер. матем., 31:4 (1967), 855–951.

[12] Ravenel, Douglas C. *Complex Cobordism and Stable Homotopy Groups of Spheres.* Pure and Applied Mathematics, 121. Academic Press Inc., Orlando, FL, 1986.

[13] Conner P. E., Floyd E. E. *Torsion in SU-bordism.* Mem. Amer. Math. Soc. 60 (1966).

[14] Wall, C. T. C. *Addendum to a paper of Conner and Floyd.* Proc. Cambridge Philos. Soc. 62 (1966), 171–175.

[15] Стонг Р. *Заметки по теории кобордизмов.* С добавлением В. М. Бухштабера. «Мир», Москва, 1973.

Коннер и Флойд[13] и Стонг[15] определили c_1*-сферические бордизмы* W, промежуточную теорию между SU- и U-бордизмами, следуя аналогичной конструкции Уолла[8] для ориентированных бордизмов. Теория W была ключевым техническим средством для вычисления Коннера и Флойда кручения в SU-бордизмах. В [16] они определили группу коэффициентов

$$\varOmega^W_{2n} = \operatorname{Ker}(\varDelta\colon \varOmega^U_{2n} \to \varOmega^U_{2n-4})$$

(для некоторой операции $\varDelta$ в комплексных бордизмах, см. конструкцию 2.2.1 и обозначения (2.2.3) в диссертации) и отождествили ее с подгруппой в $\varOmega^U_{2n}$, состоящая из тех классов бордизмов $[M^{2n}]$, у которых равны нулю все характеристические числа Чженя, содержащие множитель c_1^2 (см. теорему 4.4.9 диссертации). Связь между группами $\varOmega^{SU}_*$ и $\varOmega^W_*$ описывается следующей точной последовательностью Коннера и Флойда:

$$0 \longrightarrow \varOmega^{SU}_{2n-1} \xrightarrow{\theta} \varOmega^{SU}_{2n} \xrightarrow{\iota} \varOmega^W_{2n} \xrightarrow{\partial} \varOmega^{SU}_{2n-2} \xrightarrow{\theta} \varOmega^{SU}_{2n-1} \longrightarrow 0, \tag{0.1}$$

где θ обозначает умножение на образующую $\theta \in \varOmega^{SU}_1 \cong \mathbb{Z}/2$, ι — забывающий гомоморфизм, а $\partial\colon \varOmega^W_{2n} \to \varOmega^W_{2n-2}$ сопоставляет классу комплексных бордизмов $[M^{2n}] \in \varOmega^W_{2n}$ класс SU-бордизмов подмногообразия $N^{2n-2} \subset M^{2n}$, двойственного к классу $c_1(M)$ (см. формулу (4.4.2) диссертации). Эта точная последовательность имеет форму точной пары, для которой производная пара может быть отождествлена с членом E_2 спектральной последовательности Адамса–Новикова для спектра MSU (см. лемму 3.2.9 диссертации).

Стонг[17] расширил группы $\varOmega^W_*$ до целой промежуточной теории c_1-сферических бордизмов $MSU \to W \to MU$ (см. раздел 4.4 диссертации). В обеих работах [16] и [17] на W определяется некоторая мультипликативная структура (заметим, что подгруппа $\varOmega^W_*$ не является подкольцом в $\varOmega^U_*$) с помощью некоторых SU-линейных проекторов $\pi\colon MU \to W$. Стонг[17] показал, что кольцо коэффициентов теории W полиномиально по отношению к умножению, заданному с помощью используемого им проектора. Хотя Коннер–Флойд и Стонг определили свои проекторы различным образом, в последующей литературе, касающейся SU- и c_1-сферических бордизмов, эти два проектора использовались взаимозаменяемо, так как неявно предполагалось, что они совпадают. Как показано в предложении 4.1.12 диссертации, проекторы Коннера–Флойда и Стонга различны, несмотря на то что они определяют одно и то же умножение на W.

Спектральная последовательность Адамса–Новикова и техника формальных групп, привнесённая в топологию фундаментальной работой Новикова[18], позволили развить новый систематический подход к более ранним геометрическим вычислениям Коннера–Флойда и Стонга в кольце SU-бордизмов. Так, как было указано выше, точная последовательность Коннера–Флойда (0.1), связывающая градуированные компоненты колец $\varOmega^{SU}_*$ и $\varOmega^W_*$, допускает внутреннее описание в терминах нетривиальных дифференциалов в спектральной последовательности Адамса–Новикова для спектра MSU (см. раздел 3.2 диссертации). Этот подход далее развивался в контексте бордизмов многообразий с особенностями в работах Миронова[19], Ботвинника[20] и Вершинина[21]. Главной целью здесь было описание кольца коэффициентов $\varOmega^{Sp}_*$ еще одной классической теории бордизмов — симплектических бордизмов (в настоящее время называемых также кватернионными бордизмами), которое по-прежнему остается неизвестным. Спектральная последовательность Адамса–Новикова также стала основным инструментом для вычисления стабильных гомотопических групп сфер[22].

Новый интерес к SU-многообразиям был стимулирован изучением зеркальной симметрии и других геометрических конструкций, мотивированных теоретической физикой; ключевую роль здесь играет понятие многообразия Калаби–Яу. Под многообразием Калаби–Яу обычно

[16] Conner P. E., Floyd E. E. *Torsion in SU-bordism.* Mem. Amer. Math. Soc. 60 (1966).

[17] Стонг Р. *Заметки по теории кобордизмов.* С добавлением В. М. Бухштабера. «Мир», Москва, 1973.

[18] Новиков С. П. *Методы алгебраической топологии с точки зрения теории кобордизмов.* Изв. АН СССР. Сер. матем., 31:4 (1967), 855–951.

[19] Миронов О. К. *Существование мультипликативных структур в теориях кобордизмов с особенностями.* Изв. АН СССР. Сер. матем., 39:5 (1975), 1065–1092.

[20] Ботвинник Б. И. *Структура кольца* MSU_*. Матем. сб., 181:4 (1990), 540–555.

[21] Vershinin, Vladimir V. *Cobordisms and spectral sequences.* Translations of Mathematical Monographs, 130. American Mathematical Society, Providence, RI, 1993.

[22] Ravenel, Douglas C. *Complex Cobordism and Stable Homotopy Groups of Spheres.* Pure and Applied Mathematics, 121. Academic Press Inc., Orlando, FL, 1986.

понимают кэлерово SU-многообразие; оно обладает Риччи-плоской метрикой в силу теоремы Яу. Связь между многообразиями Калаби–Яу и SU-бордизмами кратко обсуждается в разделе 4.3.

(Стабильной) *операцией* f степени n в комплексных кобордизмах называется семейство аддитивных отображений

$$f\colon MU^k(X,A)\to MU^{k+n}(X,A),$$

функториальных по (X,A) и коммутирующих с изоморфизмами надстройки. Множество всех операций образует алгебру, обозначаемую A^U. Её можно отождествить с множеством отображений спектра MU в себя:

$$A^U\cong[MU,MU]_*=MU^*(MU)=\varprojlim MU^{*+2N}(MU(N)).$$

Имеется изоморфизм левых $\varOmega_U^*$-модулей

$$A^U\cong\varOmega_U^*\mathbin{\widehat{\otimes}}S,$$

где S — *алгебра Ландвебера–Новикова*, порождённая операциями $S_\omega=\varphi^*(s_\omega^U)$, являющимися образами при изоморфизме Тома φ^* универсальных характеристических классов $s_\omega^U\in MU^*(BU)$, соответствующих симметризациям мономов $t_1^{i_1}\cdots t_k^{i_k}$, индексированных всевозможными разбиениями $\omega=(i_1,\ldots,i_k)$. Таким образом, любой элемент $a\in A^U$ может быть единственным образом записан в виде бесконечного ряда $a=\sum_\omega\lambda_\omega S_\omega$, где $\lambda_\omega\in\varOmega_U U^*$. Структура алгебры Хопфа на S была описана Ландвебером[23] и Новиковым[24].

Забывающий морфизм $MSU\to MU$ снабжает спектр MU естественной структурой MSU-модуля, и операция $f\colon MU\to MU$ называется *SU-линейной*, если она является отображением MSU-модулей. Из стандартных свойств спектров, не имеющих кручения в гомологиях и гомотопических группах, вытекает, что MSU-линейность операции $f\colon MU\to MU$ достаточно проверять лишь на гомотопических группах $\varOmega_*^U=\pi_*(MU)$. Точнее говоря, операция f является SU-линейной тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условию $f(ab)=af(b)$ для любых элементов $a\in\varOmega_*^{SU}$, $b\in\varOmega_*^U$ (см. теорему 2.1.3 на стр. 9 автореферата).

Проекторы Стонга и Коннера–Флойда оказываются SU-линейными, и следовательно, определяемое ими умножение задаёт на W структуру MSU-алгебры. Это свойство играет важную роль в вычислениях с кольцом $\varOmega_*^W$.

Коннером и Флойдом[25] были определены геометрические операции $\partial_i\in[MU,MU]_{-2i}=[MU,\Sigma^{2i}MU]$, впоследствии изученные С. П. Новиковым[24]. Операция ∂_i сопоставляет классу комплексных бордизмов $[M]\in\varOmega_{2n}^U$ класс бордизма подмногообразия $M_i\subset M$, двойственного к $(\det\mathcal{T}M)^{\oplus i}$ (i-кратная прямая сумма детерминанта касательного расслоения). В частности, $\partial_1=\partial\colon MU_{2n}\to MU_{2n-2}$ представляет из себя «граничный оператор», отправляющий $[M]$ в класс бордизма подмногообразия, двойственного к $c_1(\mathcal{T}M)$. Ясно, что $\partial[M]$ лежит в образе забывающего отображения $\varOmega_*^{SU}\to\varOmega_*^U$. Более того, можно убедиться, что операции ∂_i являются SU-линейными.

В первой главе диссертации приводятся основные определения и конструкции из стабильной теории гомотопий и теории комплексных кобордизмов, используемые в дальнейшем. В главе 2 автором описывается алгебра всех SU-линейных операций в комплексных кобордизмах и доказывается, что они все порождаются операциями ∂_i (см. теорему 2.3.4 на стр. 9 автореферата). Глава 3 посвящена вычислению спектральной последовательности Адамса–Новикова для спектра MSU. В разделах 4.5 и 5.1 автор приводит несколько описаний проекторов $\pi\colon MU\to W$, указывает условия, характеризующие SU-линейные проекторы и SU-линейные проекторы, коммутирующие с операцией ∂, а также описывает все SU-линейные умножения в теории c_1-сферических бордизмов W и приводит условие, выделяющее умножения, задаваемые SU-линейными проекторами и SU-линейными проекторами, коммутирующими с операцией ∂. Общий алгебраический подход к экзотическим умножениям в комплексных кобордизмах и их связь с проекторами, коммутирующими с ∂, изучались в работе

[23] Landweber P. S. *Cobordism operations and Hopf algebras.* Trans. Amer. Math. Soc. 129 (1967), 94–110.

[24] Новиков С. П. *Методы алгебраической топологии с точки зрения теории кобордизмов.* Изв. АН СССР. Сер. матем., 31:4 (1967), 855–951.

[25] Conner P. E., Floyd E. E. *Torsion in SU-bordism.* Mem. Amer. Math. Soc. 60 (1966).

[26] (см. предложение 5.1.6 диссертации). Заметим, что условие SU-линейности обобщает условие мультипликативности проектора $MU \to W$ для SU-билинейного умножения на W, но мультипликативных проекторов из $MU \to W$ не существует ни для какого SU-билинейного умножения на W (см. следствие 5.3.2 на стр. 12 автореферата).

Важным свойством теории W^*, отличающим её от теории SU-бордизмов, является комплексная ориентируемость. Соответствующие формальные группы изучались В. М. Бухштабером[27]. В главе 5 подробно изучены комплексные ориентации теории W и соответствующие им формальные группы, обобщены соответствующие результаты В. М. Бухштабера, а также доказана точность по Ландвеберу этих формальных групп.

Цели и задачи диссертации

Основные цели работы состоят в следующем:

- привести подробное вычисление кольца SU-бордизмов, основанное на применении спектральной последовательности Адамса–Новикова, следуя подходу С. П. Новикова[28];
- описать множество всех SU-линейных когомологических операций в комплексных кобордизмах;
- описать SU-линейные проекторы из теории комплексных кобордизмовMU в теорию c_1-сферических бордизмов W, описать произвольные и получающиеся из проекторов SU-билинейные умножения на W и вычислить соответствующие кольца коэффициентов теории W с произвольным SU-билинейным умножением;
- вычислить кольцо коэффициентов теории W с произвольным SU-билинейным умножением;
- следуя подходу В. М. Бухштабера[32], вычислить по модулю разложимых элементов коэффициенты формальной группы в теории W для произвольной комплексной ориентации и SU-билинейного умножения и обобщить результаты [32] о подкольцах в $W^*(pt)$, порождённых коэффициентами соответствующих формальных групп;
- доказать точность по Ландвеберу теории W с произвольным SU-билинейным умножением.

Приложения, выносимые на защиту

Основными результатами работы являются следующие:

1. В главе 2 описаны все SU-линейные операции в комплексных кобордизмах в терминах введённых Коннером и Флойдом геометрических операций ∂_k, затем обобщённых С. П. Новиковым.
2. В главе 3 приведены подробные вычисления структуры A^U-модуля $MU^*(MSU)$ и кольца Ω^{SU}_* с помощью спектральной последовательности Адамса–Новикова, следуя подходу С. П. Новикова.
3. В разделах 4.5 и 5.1 описаны SU-билинейные умножения в теории c_1-сферических бордизмов W^*, описаны SU-линейные проекторы $MU \to W$, выделены проекторы, коммутирующие с операцией $\partial = \Delta_{(1,0)}$, выделены SU-билинейные умножения, задающиеся произвольными проекторами и проекторами, коммутирующими с ∂.
4. В теореме 4.5.9 для произвольного SU-билинейного умножения $*$ на W описано кольцо коэффициентов $(\Omega^W_*, *)$.

[26]Ботвинник Б. И., Бухштабер В. М., Новиков С. П., Юзвинский С. А. *Алгебраические аспекты теории умножений в комплексных кобордизмах.* УМН, 2000, том 55, выпуск 4 (334), 5–24.

[27]Бухштабер В. М. *Проекторы в унитарных кобордизмах, связанные с SU-теорией.* УМН, 1972, том 27, выпуск 6 (168), 231–232.

[28]Новиков С. П. *Методы алгебраической топологии с точки зрения теории кобордизмов.* Изв. АН СССР. Сер. матем., 31:4 (1967), 855–951.

5. В разделах 5.2 и 5.3, следуя подходу В. М. Бухштабера, для произвольного SU-билинейного умножения и произвольной комплексной ориентации на W вычислены соответствующие формальные группы по модулю разложимых элементов. Отсюда доказано обобщение результатов В. М. Бухштабера о том, что для произвольного умножения и произвольной ориентации коэффициенты формальной группы не порождают всё кольцо $W^*(pt)$, но при обращении двойки или простых чисел Ферма больших 3, для любого умножения существует такая ориентация, что коэффициенты формальной группы порождают кольцо $W^*(pt)$.

6. Доказана теорема 5.4.5 о точности по Ландвеберу теории W^* для произвольного SU-билинейного умножения.

Объект и предмет исследования

Предметом изучения является теория SU-бордизмов и её минимальное комплексно ориентированное расширение — теория c_1-сферических бордизмов W.

Объектом изучения являются SU-линейные когомологические операции в комплексных кобордизмах, спектральная последовательность Адамса–Новикова для спектра SU-бордизмов, SU-линейные умножения на теории W и SU-линейные проекторы $MU \to W$, формальные группы, соответствующие комплексным ориентациям теории W.

Научная новизна

Все основные результаты диссертации являются оригинальными, получены автором самостоятельно, и заключаются в следующем:

1. Приведены подробные вычисления структуры A^U-модуля $MU^*(MSU)$ и групп $\varOmega_*^{SU}$ с помощью спектральной последовательности Адамса–Новикова, следуя подходу С. П. Новикова.

2. Доказано, что все SU-линейные операции в комплексных кобордизмах выражаются в виде ряда от геометрических операций ∂_k.

3. Решена задача классификации всех возможных SU-билинейных умножений в теории c_1-сферических бордизмов W^* и SU-линейных проекторов $MU \to W$, в том числе, выделены проекторы, коммутирующие с операцией $\partial = \varDelta_{(1,0)}$, выделены SU-билинейные умножения, задающиеся произвольными проекторами и проекторами, коммутирующими с ∂.

4. Решена задача вычисления кольца коэффициентов $(\varOmega_*^W, *)$ для произвольного SU-билинейного умножения $*$ на W.

5. Следуя подходу В. М. Бухштабера, для произвольного SU-билинейного умножения и произвольной комплексной ориентации на W вычислены соответствующие формальные группы по модулю разложимых элементов. Отсюда доказано обобщение результатов В. М. Бухштабера о том, что для произвольного умножения и произвольной ориентации коэффициенты формальной группы не порождают всё кольцо $W^*(pt)$, но при обращении двойки или простых чисел Ферма больших 3, для любого умножения существует такая ориентация, что коэффициенты формальной группы порождают кольцо $W^*(pt)$.

6. Доказано, что для произвольного SU-билинейного умножения теория c_1-сферических кобордизмов W^* является точной по Ландвеберу.

Методы исследования

В работе используются методы стабильной теории гомотопий, теории комплексных кобордизмов, спектральной последовательности Адамса–Новикова, теории формальных групп.

Теоретическая и практическая значимость

Работа имеет теоретический характер. Её результаты и методы могут быть использованы специалистами в области алгебраической топологии и теории кобордизмов.

Степень достоверности

Результаты, выносимые автором на защиту, получены лично.

Содержащиеся в диссертации результаты обоснованы при помощи строгих математических доказательств и опубликованы в открытой печати.

Результаты других авторов, используемые в диссертации, отмечены соответствующим ссылками.

Апробация результатов диссертации

Основные результаты докладывались на следующих всероссийских и международных научных конференциях:

1. «Ломоносов 2019», г. Москва, 8–12 апреля 2019 г.;
2. Школа-конференция «Siberian summer school: Current developments in Geometry», г. Новосибирск, 26–30 августа 2019 г.;
3. «One day seminar in Toric Topology», г. Осака, 14 ноября 2019 г.;
4. «Toric Topology 2019 in Okayama», г. Окаяма, 18–22 ноября 2019 г. (Workshop for young researchers, 22 ноября);
5. International seminar for young researchers «Algebraic, combinatorial and toric topology», онлайн, г. Москва, 18 декабря 2020 г.;
6. Вторая конференция Математических центров России, Секция «Геометрия и топология», г. Москва, 8 ноября 2022 г.;
7. Международная школа «Торическая топология, комбинаторика и анализ данных», г. Санкт-Петербург, 3–9 октября 2022 г.;
8. Молодежный забег МЦМУ МИАН, г. Москва, 13 марта 2023 г.;
9. Студенческая школа-конференция «Математическая весна» 2023, г. Нижний Новгород, 27–30 марта 2023 г.;

и научно-исследовательских семинарах:

1. Семинар «Алгебраическая топология и её приложения» им. М. М. Постникова под руководством чл.-корр. РАН В. М. Бухштабера, проф. А. В. Чернавского, проф. И. А. Дынникова, проф. Т. Е. Панова, доц. Л. А. Алания, в.н.с. А. А. Гайфуллина, проф. Д. В. Миллионщикова и доц. Д. В. Гугнина, МГУ, 30 апреля 2019 г., 6 октября 2020 г. и 11 октября 2022 г.;
2. Совместный спецсеминар НМУ и лаборатории алгебраической топологии и ее приложений ФКН ВШЭ «Торическая топология, комбинаторика и теория гомотопий» под руководством проф. Т. Е. Панова, НМУ, 19 и 26 сентября 2022 г. и 17 апреля 2023 г.;
3. Семинар отдела геометрии и топологии МИАН «Геометрия, топология и математическая физика» под руководством академика РАН С. П. Новикова и чл.-корр. РАН В. М. Бухштабера, МИАН, МГУ, 21 декабря 2022 г.;
4. Совместный семинар ПОМИ–МКН им. А.А.Суслина «Теория мотивов Воеводского и алгебраические группы» под руководством чл.-корр. РАН И. А. Панина и проф. Н. А. Вавилова, ПОМИ, СПБГУ, 22 февраля 2023 г.;
5. Семинар «Геометрия, топология и их приложения» под руководством академика И. А. Тайманова, ИМ СО РАН, онлайн, 17 апреля 2023 г.

Публикации автора

Основное содержание диссертации опубликовано в трёх печатных работах [1, 2, 3], три из которых [1, 2, 3] изданы в рецензируемых научных журналах, входящих в базы данных Scopus, Web of Science и RSCI.

Структура и объём диссертации

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и библиографии. Общий объём диссертации составляет 93 страницы. Библиография включает 54 наименования на 4 страницах.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности.

Тема диссертации соответствует паспорту специальности 1.1.3 — «Геометрия и топология» по направлению исследований «13. Алгебраическая топология».

Содержание работы

Во **введении** формулируется цель работы, кратко излагаются основные результаты и указывается место данных исследований в теории комплексных, специальных унитарных и c_1-сферических бордизмов.

В **главе 1** приведён обзор основных результатов из стабильной теории гомотопий и теории кобордизмов, необходимых для работы в дальнейшем.

В **разделе 1.1** приведены основные факты и определения из общей теории спектров. А именно, вводятся понятия спектров, стабильной гомотопической категории, функторов Σ^∞ и Ω^∞, градуированных абелевых групп морфизмов $[E,F]_*$, гомотопических групп спектров $\pi_*(E)$, функторов надстройки и «денадстройки» Σ^k, $k \in \mathbb{Z}$, корасслоенных последовательностей спектров. Обсуждается связь спектров с обобщёнными теориями (ко)гомологий. Также обсуждается смэш-произведение $E \wedge F$ на спектрах, понятия кольцевых и модульных спектров и возникающие мультипликативные теории (ко)гомологий. Вводится понятие алгебры $A^E = [E,E]_{-*} = E^*(E)$ когомологических операций теории когомологий E^*. Наконец, обсуждаются ориентации векторных расслоений относительно теорий когомологий, комплексно ориентированные теории и соответствующие формальные группы. Формулируется теорема Лазара (теорема 1.1.1) о полиномиальности кольца определения универсальной формальной группы. Также вводится понятие изоморфизма двойственности Пуанкаре–Атья $D_E\colon E^*(M^n) \xrightarrow{\cong} E_{n-*}(M^n)$ для многообразий M^n с ориентированным относительно теории E^* стабильным касательным расслоением.

В **разделе 1.2** приводятся основные факты о теории комплексных бордизмов. Сначала даётся определение стабильно комплексной структуры на вещественном расслоении ζ над пространством X, то есть, класса эквивалентности комплексных структур на расслоениях $\zeta \oplus \mathbb{R}^k$, где отождествляются комплексная структура J на $\zeta \oplus \mathbb{R}^k$ и комплексная структура $J \oplus i$ на $\zeta \oplus \mathbb{R}^k \oplus \mathbb{C} \cong \zeta \oplus \mathbb{R}^{k+2}$. Гомотопически это равносильно поднятию отображения $X \to BO$, классифицирующего расслоение ζ, до отображения $X \to BU$. Стабильно комплексным многообразием называется многообразие со стабильно комплексной структурой на касательном расслоении. В конструкции 1.2.1 даётся геометрическое определение теории бордизмов стабильно комплексных многообразий, теории комплексных бордизмов $U_*(X)$. Гомотопическое определение теории комплексных бордизмов $MU_*(X)$ через спектр Тома MU даётся в конструкции 1.2.2. В теореме 1.2.3 даётся набросок доказательства совпадения геометрического и гомотопического определений теории комплексных бордизмов. В конструкции 1.2.4 даётся геометрическое описание двойственной теории когомологий, теории комплексных кобордизмах, в терминах комплексно ориентированных отображений. Далее приводятся конструкции умножений и двойственности Пуанкаре–Атья в теории комплексных кобордизмов. Приводятся структурные результаты о кольце коэффициентов $\varOmega^U_*$ теории комплексных бордизмов. Согласно теореме Милнора и Новикова (теорема 1.2.6),

$$\varOmega^U_* \cong \mathbb{Z}[a_i,\, i \geqslant 1], \quad \deg a_i = 2i,$$

и два стабильно комплексных многообразия бордантны тогда и только тогда, когда у них совпадают все характеристические числа Чженя. Полиномиальные образующие задаются условием на специальное характеристическое число s_i (иногда называемое числом Милнора). Для всякого целого числа $i \geqslant 1$, положим

$$m_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i+1 \neq p^k \text{ ни для какого простого } p; \\ p, & \text{если } i+1 = p^k \text{ для некоторого простого } p \text{ и целого } k > 0. \end{cases}$$

Класс бордизма стабильно комплексного многообразия M^{2i} может быть принят за $2i$-мерную образующую a_i тогда и только тогда, когда $s_i[M^{2i}] = \pm m_i$.

Наконец, обсуждается формальная группа, соответствующая стандартной комплексной ориентации теории комплексных бордизмов, её геометрическое описание и теорема Квиллена (теорема 1.2.7) об универсальности этой формальной группы.

В следующем **разделе 1.3** вводятся SU-многообразия и SU-бордизмы. По теореме Новикова, кольцо коэффициентов SU-бордизмов с обращённой двойкой $\varOmega_*^{SU} \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ есть кольцо многочленов с одной образующей в каждой четной размерности $\geqslant 4$:

$$\varOmega_*^{SU} \otimes \mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}] \cong \mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}][y_i,\, i \geqslant 2], \quad \deg y_i = 2i.$$

Класс бордизма SU-многообразия M^{2i} может быть принят за $2i$-мерную образующую y_i тогда и только тогда, когда $s_i[M^{2i}] = \pm m_i m_{i-1}$, с точностью до умножения на степень 2. Дополнительное соотношение делимости в размерностях вида $2p^k$ получается из простого наблюдения, что s_i-число SU-многообразия M^{2i} размерности $2i = 2p^k$ делится на p (предложение 1.3.2).

В **разделе 1.4** рассматривается алгебра операций A^U в комплексных кобордизмах и приводится её нестандартное точное представление на $MU_*(BU)$, восходящее к С. П. Новикову (конструкция 1.4.3). В теореме 1.4.5 формулируются необходимые свойства когомологической спектральной последовательности Адамса–Новикова.

В **главе 2** автором решается задача классификации SU-линейных операций в комплексных кобордизмах.

В **разделе 2.1** исследуется общее свойство SU-линейности операции и доказывается следующая

Теорема 2.1.3. *Операция $f \in [MU, MU]_*$ является SU-линейной тогда и только тогда, когда её действие на $\varOmega_*^U$ является SU-линейным.*

В **разделе 2.2**, следуя конструкции С. П. Новикова[29], определяются SU-линейные операции ∂_k, $k = 1, 2, \ldots$, сопоставляющие классу комплексных бордизмов многообразия $[M]$ класс его подмногообразия N, двойственного к $\det \mathcal{T}M^{\oplus k}$. Здесь также определяется важнейшая для теории c_1- сферических бордизмов операция $\varDelta$, переводящая класс комплексных бордизмов многообразия $[M]$ в класс его подмногообразия N, двойственного к $\det \mathcal{T}M \oplus \overline{\det \mathcal{T}M}$.

Наконец в **разделе 2.3** описывается MSU-модуль MU (предложение 2.3.1), из чего выводится следующая

Теорема 2.3.4. *Операции ∂_k образуют топологический базис левого $\varOmega_U^*$-модуля SU-линейных операций из $[MU, MU]_*$. То есть, любая SU-линейная операция $f \in [MU, MU]_*$ единственным образом записывается в виде ряда $f = \sum_{i \geqslant 0} \mu_i \partial_i$ с $\mu_i \in \varOmega_U^{-2i-*}$.*

В теореме 2.3.6 описывается мультипликативная структура кольца SU-линейных операций относительно композиции в терминах коэффициентов формальной группы комплексных кобордизмов.

Основные результаты второй главы опубликованы в работе автора [2].

Глава 3 посвящена вычислению спектральной последовательности Адамса–Новикова для спектра MSU.

В **разделе 3.1** определяется структура A^U-модуля на $MU^*(MSU)$, необходимая для вычисления спектральной последовательностью Адамса–Новикова. A^U-модуль $MU^*(MSU)$ может быть отождествлён с фактормодулем $A^U/(A^U\varDelta + A^U\partial)$ (теорема 3.1.2), где $\partial = \partial_1$.

[29] Новиков С. П. *Методы алгебраической топологии с точки зрения теории кобордизмов.* Изв. АН СССР. Сер. матем., 31:4 (1967), 855–951.

Спектральная последовательность Адамса–Новикова для спектра MSU вычисляется в **разделе 3.2**, где также получены следствия о структуре кольца SU-бордизмов Ω_*^{SU}. При вычислении групп $\mathrm{Ext}^{*,*}(MU^*(MSU), \Omega_U^*)$ появляются группы $\Omega_*^W = \mathrm{Ker}(\Delta\colon \Omega_*^U \to \Omega_{*-4}^U)$. В теореме 3.2.8 доказано, что ядро забывающего гомоморфизма $\Omega_*^{SU} \to \Omega_*^U$ состоит из элементов конечного порядка, и каждый элемент кручения из Ω_*^{SU} имеет порядок 2.

Это приводит к следующему описанию свободной части и кручения в кольце Ω_*^{SU} (теорема 3.2.11):

а) $\mathrm{Tors}\,\Omega_n^{SU} = 0$, кроме $n = 8k+1$ и $8k+2$, когда $\mathrm{Tors}\,\Omega_n^{SU}$ является $\mathbb{Z}/2$-векторным пространством ранга, равного числу разбиений числа k.

б) Группа $\Omega_{2i}^{SU}/\,\mathrm{Tors}$ изоморфна $\mathrm{Ker}(\partial\colon \Omega_{2i}^W \to \Omega_{2i-2}^W)$ при $2i \not\equiv 4 \mod 8$ и изоморфна $\mathrm{Im}(\partial\colon \Omega_{2i+2}^W \to \Omega_{2i}^W)$ при $2i \equiv 4 \mod 8$.

в) Существуют классы SU-бордизма $w_{4k} \in \Omega_{8k}^{SU}$, $k \geqslant 1$, такие, что всякий элемент конечного порядка в Ω^{SU} единственным образом представляется в виде $P \cdot \theta$ или $P \cdot \theta^2$, где P — многочлен от переменных w_{4k} с коэффициентами 0 и 1. Элемент $w_{4k} \in \Omega_{8k}^{SU}$ определяется тем условием, что он представляет полиномиальную образующую ω_{4k} в $H_{8k}(\Omega_*^W, \partial)$.

Основные результаты третьей главы опубликованы в работе автора [1].

В **главе 4** определяется и изучается теория c_1-сферических бордизмов W_*, исследуется её связь с SU-бордизмами и решается задача описания всех SU-билинейных умножений на W и вычисляются соответствующие кольца коэффициентов.

В **разделе 4.1** вводится мультипликативная структура на группе Ω_*^W. Сначала показывается, что $\Omega_*^W \subset \Omega_*^U$ является прямым слагаемым и выделяющий его проектор можно построить двумя различными способами, восходящими к Коннеру–Флойду[30] и Стонгу[31] соответственно. Прямая сумма $\Omega_*^W = \bigoplus_{i\geqslant 0} \Omega_{2i}^W$ *не* является подкольцом в Ω_*^U: мы имеем $[\mathbb{C}P^1] \in \Omega_2^W$, однако $[\mathbb{C}P^1] \times [\mathbb{C}P^1] \notin \Omega_4^W$. Тем не менее, Ω^W становится коммутативным кольцом с единицей относительно *подкрученного произведения*

$$a * b = a \cdot b + 2[V^4] \cdot \partial a \cdot \partial b,$$

где $\cdot$ обозначает произведение в кольце Ω_*^U, а $[V^4] = [\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1] - [\mathbb{C}P^2]$. Кроме того, это умножение имеет вид $\pi(a \cdot b)$ для проектора π, построенного Коннером и Флойдом или Стонгом. В теореме 4.1.9 доказывается, что несмотря на то, что определяемое ими умножение одинаково, проекторы Коннера–Флойда и Стонга всё-таки различны.

Структура кольца Ω^W с введённым выше умножением даётся теоремой 4.1.13: Ω^W является кольцом многочленов над целыми числами, с одной образующей в каждой четной размерности, кроме 4:

$$\Omega^W \cong \mathbb{Z}[x_1, x_i,\, i \geqslant 3], \quad x_1 = [\mathbb{C}P^1], \quad \deg x_i = 2i,$$

где $s_i(x_i) = \pm m_i m_{i-1}$ при $i \geqslant 3$. Граничный оператор $\partial\colon \Omega_*^W \to \Omega_{*-2}^W$, $\partial^2 = 0$, удовлетворяет равенству

$$\partial(a * b) = a * \partial b + \partial a * b - x_1 * \partial a * \partial b,$$

а полиномиальные образующие кольца Ω^W могут быть выбраны так, что удовлетворяются соотношения

$$\partial x_1 = 2, \quad \partial x_{2i} = x_{2i-1}.$$

Мультипликативная структура кольца Ω^{SU} описывается в **разделе 4.2**. Забывающее отображение $\iota\colon \Omega_*^{SU} \to \Omega_*^W$ является кольцевым гомоморфизмом, причём его ядром является в точности кручение в Ω_*^{SU}. Таким образом, факторкольцо $\Omega_*^{SU}/\mathrm{Tors}$ может быть описано как подкольцо в Ω^W.

[30] Conner P. E., Floyd E. E. *Torsion in SU-bordism.* Mem. Amer. Math. Soc. 60 (1966).

[31] Стонг Р. *Заметки по теории кобордизмов.* С добавлением В. М. Бухштабера. «Мир», Москва, 1973.

Мы имеем

$$\varOmega^W_* \otimes \mathbb{Z}[\tfrac12] \cong \mathbb{Z}[\tfrac12][x_1, x_{2k-1}, 2x_{2k} - x_1x_{2k-1}\colon k \geqslant 2],$$

где $x_1^2 = x_1 * x_1$ есть ∂-цикл, и каждый из элементов x_{2k-1} и $2x_{2k} - x_1x_{2k-1}$ при $k \geqslant 2$ также есть ∂-цикл.

Из описания кольца $\varOmega^W_*$ следует существование неразложимых элементов $y_i \in \varOmega^{SU}_{2i}$, $i \geqslant 2$ таких, что $s_i(y_i) = m_im_{i-1}$, если i нечетно, $s_2(y_2) = -48$, и $s_i(y_i) = 2m_im_{i-1}$, если i четно и $i > 2$. Эти элементы отображаются следующим образом под действием забывающего гомоморфизма $\iota\colon \varOmega^{SU}_* \to \varOmega^W_*$:

$$y_2 \mapsto 2x_1^2, \quad y_{2k-1} \mapsto x_{2k-1}, \quad y_{2k} \mapsto 2x_{2k} - x_1x_{2k-1}, \quad k \geqslant 2.$$

В частности, кольцо $\varOmega^{SU}_* \otimes \mathbb{Z}[\frac12] \cong \mathbb{Z}[\frac12][y_i\colon i \geqslant 2]$ вкладывается в $\varOmega^W_* \otimes \mathbb{Z}[\frac12]$ в качестве подкольца многочленов, порожденного элементами x_1^2, x_{2k-1} и $2x_{2k} - x_1x_{2k-1}$.

В **разделе 4.3** кратко освещается проблема нахождения у классов SU-бордизмов хороших геометрических представителей. В теоремах 4.3.1 и 4.3.2 приводятся результаты Лимонченко, Лю и Панова о том, что классы y_i могут быть представлены целочисленными линейными комбинациями гиперповерхностей Калаби–Яу в произведениях проективных пространств или квазиторическими SU-многообразиями при $i \geqslant 5$.

Также приводятся примеры представителей оставшихся маломерных классов y_2, y_3 и y_4, последний из которых построен автором.

В **разделе 4.4** определяется спектр W c_1-сферических бордизмов, как спектр, представляющий теорию бордизмов стабильно комплексных многообразий, у которых детерминантное расслоение индуцируется из $\mathbb{C}P^1$ (c_1-сферических стабильно комплексных многообразий). Получающийся спектр является MSU-модулем (произведение c_1-сферического многообразия на SU-многообразие остаётся c_1-сферическим), структура MSU-модуля W описывается предложением 4.4.1. Также доказывается, что изучавшиеся раньше группы $\varOmega^W_*$ служат группами коэффициентов теории W_* (теорема 4.4.6 диссертации) и спектр W является слоем операции $\varDelta\colon MU \to \Sigma^4 MU$ (предложение 4.4.10 диссертации).

В **разделе 4.5** автором получены несколько описаний проекторов $\pi\colon MU \to W$ и указаны условия, характеризующие SU-линейные проекторы. SU-линейный проектор Стонга $\pi_0\colon MU \to W$ выражен в виде ряда от операций ∂_i в терминах коэффициентов формальной группы комплексных кобордизмов (предложение 4.1.10 диссертации) и показано, что любой другой проектор $\pi\colon MU \to W$ имеет вид $\pi_0(1+f\varDelta)$ для некоторой операции $f \in [MU, \Sigma^{-4}MU]$ (теорема 4.5.2 диссертации), где $\varDelta \in [MU, \Sigma^4 MU]$ — операция Коннера–Флойда, удовлетворяющая $W = \operatorname{Ker} \varDelta$. В этих терминах SU-линейные проекторы соответствуют SU-линейным операциям f. Там же доказываются следующие теоремы.

Теорема 4.5.8. *Любое SU-билинейное умножение на W со стандартной единицей (т. е. получающейся с помощью забывания из единицы MSU) имеет вид*

$$a \tilde{*} b = ab + (2[V] + \omega)\partial a \partial b$$

для $[V] = [\mathbb{C}P^1]^2 - [\mathbb{C}P^2]$ и $\omega \in \varOmega^W_4$. Все такие умножения ассоциативны и коммутативны. Более того, из SU-линейных проекторов получаются в точности те умножения, для которых $\omega = 2\widetilde{\omega}$, $\widetilde{\omega} \in W_4$.

Так как группа $\varOmega^W_4$ изоморфна $\mathbb{Z}$ с образующей $[K] = 9[\mathbb{C}P^1]^2 - 8[\mathbb{C}P^2]$, мы получаем, что любое SU-билинейное умножение имеет вид

$$a *_q b = ab + (2[V] + q[K])\partial a \partial b, \quad q \in \mathbb{Z}$$

Теорема 4.5.9. *Относительно умножения $*_q$ кольцо $\varOmega^W_*$ имеет вид*

$$(\varOmega_W^*, *_q) = \mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3, \ldots]/(x_1 *_q x_1 = (4q+1)x_2).$$

Образующие x_i при $i \neq 2$ выделяются условием $s_i(x_i) = \pm m_im_{i-1}$, а x_2 определяется из условия $x_1 *_q x_1 = (4q+1)x_2$, и образующие можно выбрать так, что будут выполнены равенства

$$\partial(a *_q b) = a\partial b + \partial a b - x_1 \partial a \partial b,$$

$$\partial x_1 = 2, \quad \partial x_{2i} = x_{2i-1}.$$

В частности, ни для какого SU-билинейного умножения $a *_q b$, кроме $a * b = a *_0 b = ab + 2\alpha_{12}\partial a \partial b$, задаваемого проектором Стонга π_{St}, кольцо Ω^*_W не является полиномиальным.

Основные результаты второй главы опубликованы в работе автора [2].

В **главе 5** изучаются комплексные ориентации теории W и соответствующие им формальные группы. Решается задача вычисления соответствующих формальных групп по модулю разложимых элементов и доказываются обобщения результатов В. М. Бухштабера[32] о кольцах, порождаемых коэффициентами формальных групп, на случай произвольных SU-билинейных умножений на W. Кроме того, доказывается точность по Ландвеберу этих формальных групп.

В **разделе 5.1** изучаются общие свойства комплексных ориентаций спектра W. Любая комплексная ориентация $w \in \widetilde{W}^2(\mathbb{C}P^\infty)$ получается с помощью SU-линейного проектора из некоторой ориентации $\widetilde{u} \in \widetilde{MU}^2(\mathbb{C}P^\infty)$ в комплексных кобордизмах (предложение 5.1.1 диссертации). Кроме того, спектр W является «минимальным комплексно ориентируемым расширением» спектра MSU (предложение 5.1.2 диссертации). Из комплексной ориентируемости W следует, что мы можем описать все SU-линейные операции $MU \to W$ (теорема 5.1.3 диссертации) и описать те SU-линейные проекторы $MU \to W$, которые коммутируют с операцией ∂ (теорема 5.1.5 диссертации), а также соответствующие им умножения. В [33] показано, что такие умножения продолжаются до умножений на всём спектре MU.

В **разделе 5.2**, следуя подходу В. М. Бухштабера [34], для произвольного SU-билинейного умножения и произвольной комплексной ориентации на W автором вычисляется соответствующая формальная группа F_W с точностью до разложимых элементов:

Предложение 5.2.8. *Имеет место равенство*

$$F_W(u,v) = u + v - ([\mathbb{C}P^1] + 2\lambda)uv + (4[V] + 3\omega_2 - 2(2\ell+1)^2(2[V] + q[K]))(uv^2 + vu^2) + \\ + \sum_{k \geqslant 3} \Big(a_k\big(1 + (-1)^k(k+1)\big) + m_k\omega_k \Big) \frac{(u+v)^{k+1} - u^{k+1} - v^{k+1}}{m_k} \mod J^2,$$

где a_i — полиномиальные образующие кольца Ω^U_* с $s_i(a_i) = -m_i$, $\lambda \in \Omega^U_2$, $\partial\lambda = 2\ell$, $\omega_i \in \Omega^W_{2i}$.

В **разделе 5.3** доказываются следующие теоремы:

Теорема 5.3.1. *Ни для какой комплексной ориентации w и ни для какого SU-билинейного умножения $*_q$ на W коэффициенты соответствующей формальной группы F_W не порождают всего кольца $(\Omega^W_*, *_q)$.*

Следствие 5.3.2. *Ни для какого SU-билинейного умножения на W не существует мультипликативных проекторов $MU \to W$.*

Теорема 5.3.3. *Пусть A — подкольцо в Ω^W_*, порождённое коэффициентами формальной группы F_W. Тогда существует ориентация на W, такая, что $A[\frac{1}{2}] = \Omega^W_*[\frac{1}{2}]$.*

Теорема 5.3.7. *Рассмотрим множество $\mathcal{P}$ простых чисел вида $p = 2^k + 1$ (простых чисел Ферма), строго больших 3. Рассмотрим теорию $W^*[\mathcal{P}^{-1}]$, получаемую из теории W^* обращением всех $p \in \mathcal{P}$ (тензорным умножением на кольцо $\mathbb{Z}[\mathcal{P}^{-1}] = \mathbb{Z}[1/p, p \in \mathcal{P}]$).*

Тогда для теории $W^*[\mathcal{P}^{-1}]$ существует такая комплексная ориентация, что коэффициенты соответствующей формальной группы порождают всё кольцо $\Omega^*_W[\mathcal{P}^{-1}]$.

Наконец в **разделе 5.4** автором доказывается точность по Ландвеберу спектра W:

[32] Бухштабер В. М. *Проекторы в унитарных кобордизмах, связанные с SU-теорией.* УМН, 1972, том 27, выпуск 6 (168), 231–232.

[33] Ботвинник Б. И., Бухштабер В. М., Новиков С. П., Юзвинский С. А. *Алгебраические аспекты теории умножений в комплексных кобордизмах.* УМН, 2000, том 55, выпуск 4 (334), 5–24.

[34] Бухштабер В. М. *Проекторы в унитарных кобордизмах, связанные с SU-теорией.* УМН, 1972, том 27, выпуск 6 (168), 231–232.

Теорема 5.4.5. *Формальная группа $F_W(u,v)$ над кольцом $(\Omega^*_W, *_q)$ точна по Ландвеберу (для любого умножения $*_q$).*

Следствие 5.4.6. *Для любого SU-билинейного умножения $*_q$ на теории W^* имеют место естественные изоморфизм теорий гомологий $W_*(-) = MU_*(-) \otimes_{\Omega^U_*} (\Omega^W_*, *_q)$ и изоморфизм мультипликативных теорий когомологий $W^*(-) = MU^*(-) \otimes_{\Omega^*_U} (\Omega^*_W, *_q)$ на конечных комплексах.*

Основные результаты пятой главы опубликованы в работах автора [2, 3].

Заключение

1. В главе 2 описаны все SU-линейные операции в комплексных кобордизмах в терминах введённых Коннером и Флойдом геометрических операций ∂_k, затем обобщённых С. П. Новиковым.

2. В главе 3 приведены подробные вычисления структуры A^U-модуля $MU^*(MSU)$ и кольца Ω^{SU}_* с помощью спектральной последовательности Адамса–Новикова, следуя подходу С. П. Новикова.

3. В разделах 4.5 и 5.1 описаны SU-билинейные умножения в теории c_1-сферических бордизмов W^*, описаны SU-линейные проекторы $MU \to W$, выделены проекторы, коммутирующие с операцией $\partial = \Delta_{(1,0)}$, выделены SU-билинейные умножения, задающиеся произвольными проекторами и проекторами, коммутирующими с ∂.

4. В теореме 4.5.9 для произвольного SU-билинейного умножения $*$ на W описано кольцо коэффициентов $(\Omega^W_*, *)$.

5. В разделах 5.2 и 5.3, следуя подходу В. М. Бухштабера, для произвольного SU-билинейного умножения и произвольной комплексной ориентации на W вычислены соответствующие формальные группы по модулю разложимых элементов. Отсюда доказано обобщение результатов В. М. Бухштабера о том, что для произвольного умножения и произвольной ориентации коэффициенты формальной группы не порождают всё кольцо $W^*(pt)$, но при обращении двойки или простых чисел Ферма больших 3, для любого умножения существует такая ориентация, что коэффициенты формальной группы порождают кольцо $W^*(pt)$.

6. Доказана теорема 5.4.5 о точности по Ландвеберу теории W^* для произвольного SU-билинейного умножения.

Результаты диссертации могут быть интересны специалистам, работающим в области алгебраической топологии и комплексных кобордизмов.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность чл.-корр. РАН Виктору Матвеевичу Бухштаберу за внимание к работе и многочисленные полезные обсуждения, замечания и комментарии.

Автор выражает самую глубокую благодарность своему научному руководителю профессору Тарасу Евгеньевичу Панову за постановку задачи, постоянное внимание к работе, многочисленные плодотворные обсуждения, помощь в написании работы и общую поддержку.

Автор выражает искреннюю благодарность всему коллективу кафедры высшей геометрии и топологии механико-математического факультета МГУ за дружелюбную и чрезвычайно вдохновляющую научную атмосферу.

Наконец, автор благодарит своих родителей за поддержку во время обучения на факультете.

Список публикаций автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности

[1] Лимонченко И. Ю., Панов Т. Е., Черных Г. С., *SU-бордизмы: структурные результаты и геометрические представители.* УМН, 74:3(447) (2019), 95–166. 8, 10

I. Yu. Limonchenko, T. E. Panov, G. Chernykh, *SU-bordism: structure results and geometric representative*", Russian Math. Surveys, 74:3 (2019), 461–524.

DOI: 10.4213/rm9883

Журнал индексируется в Scopus, РИНЦ, RSCI WoS.

IF WoS = 0,900; SJR = 0,450 (2022), двухлетний импакт-фактор РИНЦ = 1,242 (2021).

Автору принадлежат все основные результаты глав 3–7, а также содержание примера 13.3.

[2] Панов Т. Е., Черных Г. С., *SU-линейные операции в комплексных кобордизмах и теория c_1-сферических бордизмов.* Изв. РАН. Сер. матем., 87:4 (2023), 133-165. 8, 9, 12, 13

DOI: 10.4213/im9334

Журнал индексируется в Scopus, РИНЦ, RSCI WoS.

IF WoS = 0,800; SJR = 0,449 (2022), двухлетний импакт-фактор РИНЦ = 0,859 (2021).

Автором получены все основные результаты. Научным руководителем, профессором Т. Е. Пановым поставлены задачи и намечены направления их решения.

[3] Черных Г. С., *Точность по Ландвеберу формальной группы c_1-сферических бордизмов*, Матем. заметки, 113:6 (2023), 918-928. 8, 13

DOI: 10.4213/mzm13845

G. Chernykh, *Landweber Exactness of the Formal Group Law in c_1-Spherical Bordism*, Math. Notes, 113:6 (2023), 850–858.

DOI: 10.1134/S0001434623050267

Журнал индексируется в Scopus, РИНЦ, RSCI WoS.

IF WoS = 0,600; SJR = 0,493 (2022), двухлетний импакт-фактор РИНЦ = 0,475 (2021).